Variables aleatorias discretas

Considere el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ y la función $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

La imagen de Ω bajo X se define como sigue

$$\mathrm{Img}(X) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, \exists \omega \in \Omega \ : X(\omega) = x\}.$$

Si $\mathrm{Img}(X)$ es un conjunto contable, diremos que X es una *variable aleatoria discreta* en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Recuerde que un conjunto A es contable si se puede establecer una biyección entre A y un subconjunto (no necesariamente propio) de los números naturales.

La función de probabilidad (o probabilidad o función de masa...) es la función $\mathbf{P}_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ tal que

$$\mathbf{P}_X(x) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}).$$

Una condición técnica imprescindible para poder definir $\mathbf{P}_X$ correctamente es

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} \in \mathcal{F} \quad \forall x \in \mathrm{Img}(X),$$

ya que $\mathbf{P} : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$. Claramente, si $x \notin \mathrm{Img}(X)$ entonces $\mathbf{P}_X(x) = 0$.

Finalmente, si X es una variable aleatoria discreta se cumple que

$$\sum_{x \in \mathrm{Img}(X)} \mathbf{P}_X(x) = \mathbf{P}\Big(\bigcup_{x \in \mathrm{Img}(X)} \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}\Big) = \mathbf{P}(\Omega) = 1$$

puesto que $\{\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} : x \in \mathrm{Img}(X)\}$ es una partición de Ω.

Para todos los efectos practicos, el conocer la función de probabilidad de X es conocer la *distribución* de X.

Diremos que dos variables aleatorias son *identicamente distribuidas* si tienen la misma distribución, es decir, si sus funciones de probabilidad son iguales. Es importante notar que dos variables aleatorias pueden ser identicamente distribuidas y no ser iguales (o ser iguales y tener distribuciones distintas).

Diremos que dos variables aleatorias sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ son *independientes* si los eventos $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$ y $\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \in B\}$ son independientes para todo $A \subset \mathrm{Img}(X)$ y $B \subset \mathrm{Img}(Y)$.

La *función de probabilidad conjunta* (o *conjunta*) se define como

$$\mathbf{P}_{X,Y}(x,y) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\})$$

En este caso, las funciones de probabilidad $\mathbf{P}_X$ y $\mathbf{P}_Y$ de las variables X y Y respectivamente, son conocidas como las *funciones de probabilidad marginales*.

Claramente debe ocurrir que:

$$\mathbf{P}_X(x) = \sum_{y \in \mathrm{Img}(Y)} \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\})$$
$$\mathbf{P}_Y(y) = \sum_{x \in \mathrm{Img}(X)} \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\})$$

pues tanto $\{\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} : x \in \mathrm{Img}(X)\}$ como $\{\{\omega \in \Omega : Y(\omega) = y\} : y \in \mathrm{Img}(Y)\}$ son particiones de Ω.

Un teorema importante es que X y Y son independientes si y solo si $\mathbf{P}_{X,Y}(x,y) = \mathbf{P}_X(x)\mathbf{P}_Y(y)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $y \in \mathbb{R}$.

Algunas variables aleatorias discretas

Las siguentes variables aleatorias aparecen frecuentemente en situaciones diversas (por esa razón, frecuentemente se habla de *modelos clásicos* en referencia a dichas variables). Nótese que la tabla muestra solo una porción insignificante de las variables aleatorias discretas que pueden resultar de interés.

- **Constante**
  - Descripción: La variable aleatoria vale siempre lo mismo, es decir es *deterministica*.
  - Parámetros:
    $c \in \mathbb{R}$: el valor de la constante.
  - Representación: $X \sim \mathsf{Const}(c)$
- **Uniforme Discreta**
  - Descripción: Se efectua un experimento que puede tener multiples resultados distintos, mutuamente excluyentes y equiprobables. La variable aleatoria toma como valor al número que representa al resultado.
  - Parámetros:
    $n \in \mathbb{N} \wedge n > 0$: el número de resultados posibles.
  - Representación: $X \sim \mathsf{Unif}(n)$
  - Ejemplos:
    * Si X es el resultado del lanzamiento de un dado justo entonces $X \sim \mathsf{Unif}(6)$.
    * Si X es el resultado del giro de una ruleta justa entonces $(X+1) \sim \mathsf{Unif}(37)$.
    * Si X es el resultado de una de loteria con k digitos entonces $(X+1) \sim \mathsf{Unif}(10^k)$.
- **Bernoulli**
  - Descripción: Se efectua un experimento que puede tener dos resultados mutuamente excluyentes: *éxito* o *fracaso*. Si el resultado es *éxito* la variable toma el valor 1, en caso contrario el valor de la variable es 0.
  - Parámetros:
    $p \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq p \leq 1$: la probabilidad de éxito.
  - Representación: $X \sim \mathsf{Ber}(p)$
  - Ejemplos:
    * Si X vale 1 cuando una moneda justa sale *cara* y 0 en caso contrario, entonces $X \sim \mathsf{Ber}(\frac{1}{2})$.
    * Si X vale 1 cuando un dado justo no sale *tres* y 0 en caso contrario, entonces $X \sim \mathsf{Ber}(\frac{5}{6})$.
- **Binomial**
  - Descripción: Se efectuan experimentos tipo Bernoulli independentes e identicamente distribuidos y la variable aleatoria cuenta el número de éxitos obtenidos.
  - Parámetros:
    $n \in \mathbb{N} \wedge n > 0$: el número de experimentos Bernoulli a realizar.
    $p \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq p \leq 1$: la probabilidad de éxito de cada experimento Bernoulli.
  - Representación: $X \sim \mathsf{Bin}(n, p)$
  - Ejemplos:
    * Si X cuenta cuantas veces sale *cara* al lanzar una moneda justa 20 veces entonces $X \sim \mathsf{Bin}(20, \frac{1}{2})$.
    * Si X cuenta el numero de bolas rojas que se observan cuando se extraen con reemplazo quince bolas de una bolsa con cinco rojas y siete blancas entonces $X \sim \mathsf{Bin}(15, \frac{5}{12})$.
    * Si X es la cantidad de enfermos en un grupo de 173 personas y sabemos que la enfermedad esta presente en el 3.7% de la poblacion entonces $X \sim \mathsf{Bin}(173, 0.037)$.
    * Si $(X+1) \sim \mathsf{Unif}(2^b)$ y $\#(X)$ es la suma de los bits de X entonces $\#(X) \sim \mathsf{Bin}(b, \frac{1}{2})$.
    * Si $X \sim \mathsf{Bin}(n_1, p)$ y $Y \sim \mathsf{Bin}(n_2, p)$ y ambas variables son independientes entonces tenemos que $(X+Y) \sim \mathsf{Bin}(n_1 + n_2, p)$.

- **Geométrica**
  - Descripción: Se efectuan experimentos tipo Bernoulli independendes e identicamente distribuidos y la variable aleatoria cuenta el número de intentos necesarios para obtener el primer éxito.
  - Parámetros:
    $p \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq p \leq 1$: la probabilidad de éxito de cada experimento Bernoulli.
  - Representación: $X \sim \mathsf{Geo}(p)$
  - Ejemplos:
    * Si X cuenta el número de lanzamientos de una moneda justa hasta que observamos la primera *cara* entonces $X \sim \mathsf{Geo}(\frac{1}{2})$.
    * Si X cuenta el numero de extracciones de pares de bolas al azar con reemplazo de una bolsa con cinco bolas rojas y siete blancas hasta que obtenemos por primera vez un par de bolas blancas entonces $X \sim \mathsf{Geo}(\frac{7}{22})$.
    * Si X cuenta el número de veces que un jugador juega al Kino justo hasta que acierta 15 entonces $X \sim \mathsf{Geo}(\frac{1}{\binom{25}{15}})$.

- **Binomial Negativa**
  - Descripción: Se efectuan experimentos tipo Bernoulli independendes e identicamente distribuidos y la variable aleatoria cuenta el número de intentos necesarios hasta obtener un cierto número de éxitos.
  - Parámetros:
    $r \in \mathbb{N} \wedge r > 0$: el número de éxitos que se desea obtener.
    $p \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq p \leq 1$: la probabilidad de éxito de cada experimento Bernoulli.
  - Representación: $X \sim \mathsf{BinNeg}(r, p)$
  - Ejemplos:
    * Si X cuenta el número de lanzamientos de una moneda justa hasta que observamos tres *caras* entonces $X \sim \mathsf{BinNeg}(3, \frac{1}{2})$.
    * Si $X \sim \mathsf{Geo}(p)$ y $Y \sim \mathsf{Geo}(p)$ y ambas variables son independientes entonces $(X + Y) \sim \mathsf{BinNeg}(2, p)$.
    * Si $X \sim \mathsf{BinNeg}(r_1, p)$ y $Y \sim \mathsf{BinNeg}(r_2, p)$ y ambas variables son independientes entonces tenemos que $(X + Y) \sim \mathsf{BinNeg}(r_1 + r_2, p)$.

- **Hipergeométrica**
  - Descripción: Se efectuan extracciones sin reemplazo de un conjunto de objetos distintos separados en dos clases (objetos especiales y objetos no¯especiales). La variable aleatoria cuenta el número de objetos especiales seleccionados.
  - Parámetros:
    $n \in \mathbb{N} \wedge n > 0$: el número total de objetos especiales.
    $k \in \mathbb{N} \wedge 0 \leq k \leq n$: el número total de objetos especiales.
    $j \in \mathbb{N} \wedge 0 < j \leq$: el número de objetos a extraer (sin reemplazo).
  - Representación:
    $X \sim \mathsf{Hip}(n, k, j)$
  - Ejemplos:
    * Si X cuenta el número de aciertos de un jugador en un juego de kino justo entonces $X \sim \mathsf{Hip}(25, 15, 15)$.
    * Si X cuenta el número de aciertos de un jugador en un juego de kino paralelo justo (donde hay cartones con cinco números y el jugador debe tener los números salidos en el sorteo del kino justo para ganar) entonces $X \sim \mathsf{Hip}(25, 15, 5)$.

- **Poisson**
  - Descripción: Si se tienen eventos que ocurren en un cierto conjunto de manera que el conjunto se puede dividir en n *partes* suficientemente pequeñas tales que la probabilidad de que mas de un evento ocurra en una misma *parte* sea cero y la probabilidad de que un evento ocurra en una *parte* sea $0 < p < 1$, tendremos que la ocurrencia de cada evento en cada *parte* se puede ver como un experimento Bernoulli con probabilidad de éxito p desconocida.

Si la ocurrencia de un evento en una *parte* particular se puede asumir independiente de la ocurrencia de un evento en una *parte* distinta, podremos decir que la variable aleatoria que cuenta el número de *partes* donde ocurren eventos es binomial con párametros n y p desconocidos (claramente la manera de dividir el conjunto en *partes* no es única).

No es de extrañar que si el número n de *partes* crece, la probabilidad p decrezca. Si tomamos $\lambda = np$ y consideramos la probabilidad $\mathbf{P}(\mathsf{Bin}(n,p) = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ cuando $n \to \infty$ para $k > 0$ tendremos que

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) = \frac{\lambda^k}{k!} \mathbf{e}^{-\lambda}.$$

Por otro lado, si $k = 0$ se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n = \frac{\lambda^0}{0!} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \frac{\lambda^0}{0!} \mathbf{e}^{-\lambda}.$$

Lo que quiere decir que la probabilidad de que en el conjunto ocurran exactamente k eventos es $\frac{\lambda^k}{k!} \mathbf{e}^{-\lambda}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Definiremos la variable aleatoria Poisson parámetro λ como aquella que toma los valores $0, 1, 2, \ldots$ con la probabilidad dada por la expresión previa.

Tipicamente, una situación se podrá modelar con una variable aleatoria Poisson si se cumplen las siguientes suposiciones:

1. La variable toma solo valores enteros no negativos.
2. La ocurrencia de un evento no debe modificar la probabilidad de que eventos subsecuentes ocurran o no, es decir los eventos deben ocurrir de manera *independiente*.
3. La frecuencia promedio del número de eventos que ocurren en el conjunto es conocida.
4. La frecuencia promedio del número de eventos que ocurren en el conjunto es relativamente pequeña con respecto al número potencial de eventos que pueden ocurrir, es decir, los eventos deben ser *poco frecuentes*.
5. El número de ocurrencias de eventos es observable, pero no tiene sentido alguno el preguntarse cuantos eventos *no ocurren*. Este punto es interesante contrastarlo con el caso binomial, donde tenemos dos eventos mutuamente excluyentes.

La Poisson resulta ser un modelo razonable para múltiples situaciones donde las suposiciones anteriores se cumplan.

Son ejemplos de situaciones que se modelan mediante variables aleatorias Poisson las siguentes situaciones:

- Número de cráteres en una superficie dada.
- Número de llamadas telefónicas que recibe una central durante una hora.
- Número de trozos de chocolate en una galleta de *chocolate chip*.
- Número de clientes que llegan a un banco.
- Número de errores tipográficos por página.

Es interesante notar que dada la costrucción de la función de probabilidad de una variable aleatoria Poisson parámetro λ, podemos utilizar la misma para aproximar el valor de la función de probabilidad de una variable aleatoria binomial, siempre y cuando n sea *grande*, p *pequeño* (una sugerencia usual es que $p < 0.1$) y λ *no muy grande* (una sugerencia usual es $\lambda = np \leq 5$).

- Parametros:
  $\lambda \in \mathbb{R} \wedge \lambda > 0$: el número promedio de eventos que ocurren en el conjunto.
- Representación: $X \sim \mathsf{Poisson}(\lambda)$
- Ejemplos:
  - Si X cuenta el número de choques en una esquina durante una semana dada, y el promedio semanal de choques en esa esquina es 3.72 entonces $X \sim \mathsf{Poisson}(3.72)$.
  - Si $X \sim \mathsf{Poisson}(\lambda)$ y $Y \sim \mathsf{Poisson}(\mu)$ y ambas variables son independientes entonces tenemos que $(X+Y) \sim \mathsf{Poisson}(\lambda + \mu)$.

Rangos y funciones de probabilidad

Nombre $X \sim$	**Rango** $\mathrm{Img}(X)$	**Probabilidad** $\mathbf{P}_X(x)$	**Esperanza** $\mathbf{E}(X)$	**Varianza** $\mathbf{Var}(X)$
Const(c)	$\{c\}$	$\mathbb{1}_{\{x=c\}}$	c	0
Unif(n)	$\{1,2,\ldots,n\}$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{\{x=i\}}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Ber(p)	$\{0,1\}$	$p\mathbb{1}_{\{x=1\}}+(1-p)\mathbb{1}_{\{x=0\}}$	p	$p(1-p)$
Bin(n,p)	$\{0,1,\ldots,n\}$	$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$	np	$np(1-p)$
Geo(p)	$\{1,2,\ldots\}$	$(1-p)^{x-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
BinNeg(r,p)	$\{r,r+1,r+2,\ldots\}$	$\binom{x-1}{r-1}p^r(1-p)^{x-r}$	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$
Hip(j,k,n)	$\{\max(0,j+k-n),\ldots,\min(j,k)\}$	$\frac{\binom{k}{x}\binom{n-k}{j-x}}{\binom{n}{j}}$	$\frac{jk}{n}$	$\frac{jk(n-k)(n-j)}{n^2(n-1)}$
Poisson(λ)	$\{0,1,2,\ldots\}$	$\frac{\lambda^x}{x!}\mathbf{e}^{-\lambda}$	λ	λ

Recuerde que:

$$\mathbf{E}(X) \equiv \sum_{x\in\mathrm{Img}(X)} x\mathbf{P}(\{\omega\in\Omega : X(\omega)=x\})$$ para toda variable aleatoria X

$$\mathbf{E}(g(X)) \equiv \sum_{x\in\mathrm{Img}(X)} g(x)\mathbf{P}(\{\omega\in\Omega : X(\omega)=x\})$$ para toda variable aleatoria X

$$\mathbf{Var}(X) \equiv \mathbf{E}(X^2)-\mathbf{E}(X)^2$$ para toda variable aleatoria X

$$n! \equiv \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} i & \text{si } n>0 \\ 1 & \text{si } n=0 \end{cases}$$ para todo $n\in\mathbb{N}$

$$\binom{n}{k} \equiv \frac{n!}{k!(n-k)!}$$ para todo $n\in\mathbb{N}\wedge k\in\mathbb{N}\wedge 0\le k\le n$

$$\mathbb{1}_{\{x=a\}} \equiv \begin{cases} 1 & \text{si } x=a \\ 0 & \text{si } x\neq a \end{cases}$$ para todo $a\in\mathbb{R}$

$$\max(a,b) \equiv \begin{cases} a & \text{si } a\ge b \\ b & \text{si } a<b \end{cases}$$ para todo $a\in\mathbb{R}\wedge b\in\mathbb{R}$

$$\min(a,b) \equiv \begin{cases} a & \text{si } a\le b \\ b & \text{si } a>b \end{cases}$$ para todo $a\in\mathbb{R}\wedge b\in\mathbb{R}$